Chapitre 2

Ensembles et applications

Dorénavant les objets mathématiques sont appelés aussi *ensembles.*

2.1 Ensembles

2.1.1 L'égalité et l'appartenance

L'égalité et l'appartenance sont des notions fondamentales en mathématiques.

Le signe de l'égalité, noté =, sert à identifier les ensembles. Si a et b des ensembles,

$$a = b$$

est une relation. Voici les axiomes de l'égalité :

(i) Réflexivité : (Pour tout x) $x = x$.

(ii) Symétrie : Si $x = y$ alors $y = x$.

(iii) Transitivité : Si $x = y$ et $y = z$ alors $x = z$.

(iv) Substitution : Pour toute relation $R\{x\}$, si $R\{x\}$ est vraie et $x = x'$, alors $R\{x'\}$ est vraie aussi.

Un exemple d'application de (iv) : Soit y un ensemble et si $x \in y$ (resp. $y \in x$) et $x = x'$ alors $x' \in y$ (resp. $y \in x'$).

La négation de la relation $a = b$ se note $a \neq b$. Si cette relation est vraie, on dit que a est *différent* de b.

Le signe de l'appartenance est noté $\in$. Si a et b des ensembles,

$$a \in b$$

est une relation qui se lit a *appartient* à b ou a est un *élément* de b. La négation de la relation $a \in b$ se note $a \notin b$.

Axiome d'extentionalité. Soient A et B deux ensembles. On a $A = B$ est équivalente à

$$(\forall x)[(x \in A) \Longleftrightarrow (x \in B)].$$

Puisqu'un ensemble est complétement déterminé par la donnée de ses éléments, on peut noter tout ensemble qui consiste d'éléments $a, b, c, \ldots$ par

$$\{a, b, c, \ldots\}.$$

2.1.2 Parties d'un ensemble

Soient A et B deux ensembles. On désigne par

$$A \subset B \quad \text{ou} \quad B \supset A$$

la relation

$$(\forall x)\,[(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)].$$

Si c'est le cas, on dit que A *est contenu dans* B ou B *contient* A, ou encore A *est une partie de* B.

Le signe $\subset$ s'appelle le *signe d'inclusion*.

Théorème 2.1.1. *1)* $A \subset A$.
2) Si $A \subset B$ *et* $B \subset C$ *alors* $A \subset C$.
3) La relation $A = B$ *est équivalente à* $A \subset B$ *et* $B \subset A$.

En effet, 1) est immédiate de (TL 3) (Chap. 1) et 2) est immédiate de (TL 1). L'équivalence 3) est une reformulation de l'axiome d'extentionalité.

Axiome de sélection ou de compréhension. Soit $R\{x\}$ une relation où figure une variable x. Pour tout ensemble X, il existe une partie A de X (et une seule) vérifiant :

$$(x \in A) \Longleftrightarrow [(x \in X)\,\text{et}\,R\{x\}].$$

On dit que A est l'ensemble des $x \in X$ vérifiant la relation $R\{x\}$ et on écrit

$$A = \{x \in X \mid R\{x\}\}.$$

Exemple 2.1.2. Si on prend $X = \mathbb{Z}$ et $R\{x\}$ la relation “il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$”, A est l'ensemble des nombres entiers pairs.

Soient X un ensemble et A une partie de X. L'ensemble

$$\{x \in X \mid x \notin A\}$$

s'appelle le *complémentaire de* A dans X. On le désigne par $X - A$, ou $X \setminus A$, ou $\complement_X A$, ou A^c. Pour éviter toute ambiguïté, la première notation est à éviter lorsque X est déjà muni d'une loi additive.

Théorème 2.1.3. *Soient A et B deux parties d'un ensemble X. On a*
1) $X - (X - A) = A$.
2) $(A \subset B) \Longleftrightarrow (X - B \subset X - A)$.

Démonstration. 1) Soit $x \in X$. On a

$$\begin{aligned} x \in X - (X - A) &\Longleftrightarrow x \notin (X - A) \\ &\Longleftrightarrow x \notin X \text{ ou } x \in A \\ &\Longleftrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Donc pour tout x,

$$[x \in X - (X - A) \text{ et } x \in X] \Longleftrightarrow [x \in A \text{ et } x \in X].$$

Finalement, pour tout x,

$$x \in X - (X - A) \Longleftrightarrow x \in A.$$

2) $\Longrightarrow$: Soit $x \in X - B$. Donc $x \notin B$. Alors $x \notin A$ car $A \subset B$. D'où $x \in X - A$.
L'implication réciproque s'obtient de "$\Longrightarrow$" et de 1). □

2.1.3 Ensemble vide

Soit X un ensemble. On considère $\varnothing = X - X$ et on l'appelle la *partie vide de X*. On a

$$x \in \varnothing \Longleftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin X).$$

Donc $\varnothing$ ne contient aucun élément.
Soit Y un ensemble. D'après Ex. 4 de la série 1,

$$(x \in X \text{ et } x \notin X) \Longleftrightarrow (x \in Y \text{ et } x \notin Y).$$

Donc $\varnothing$ ne dépend pas du choix de X. On l'appelle aussi *l'ensemble vide*.

2.1.4 Ensembles à un, deux éléments

Axiome de la paire. Pour tous ensembles a et b il existe un ensemble qui admet a et b comme seuls éléments.
On a

$$x \in \{a, b\} \Longleftrightarrow (x = a \text{ ou } x = b).$$

L'ensemble $\{a, a\}$ qu'on note $\{a\}$, est dit *ensemble à un élément* ou *singleton*. On a

$$x \in \{a\} \Longleftrightarrow x = a$$

et

$$x \in X \Longleftrightarrow \{x\} \subset X.$$

2.1.5 Ensemble des parties d'un ensemble

Axiome de l'ensemble des parties. Pour tout ensemble X il existe un ensemble (et un seul) dont les seuls éléments sont les parties de X.

Cet ensemble, qu'on note par $\mathscr{P}(X)$, est dit *l'ensemble des parties de* X.

2.1.6 Couples

Soient x et y deux ensembles. L'ensemble

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

s'appelle *le couple formé de* x *et de* y et se note (x, y). Cette définition est due à Kuratowski.

La proposition suivante, dont la démonstration est laissée à titre d'exercice, est tout ce qu'on doit se rapeller par la suite :

Proposition 2.1.4. *Soient* x *et* y *deux ensembles. On a l'équivalence*

$$(x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y').$$

Un ensemble z est dit *un couple* s'il existe deux ensembles x et y tels que $z = (x, y)$. On appelle x *première coordonnée* ou *première projection* et on le note $\mathrm{pr}_1(z)$. De même, on appelle y *seconde coordonnée* ou *seconde projection* et on le note $\mathrm{pr}_2(z)$.

Un ensemble G est dit un *graphe* si tout élément de G est un couple. On définit les ensembles

$$X = \{x \mid \exists z \in G \text{ tel que } x = \mathrm{pr}_1(z)\}$$

et

$$Y = \{y \mid \exists z \in G \text{ tel que } y = \mathrm{pr}_2(z)\}.$$

On note alors $X = \mathrm{pr}_1(G)$ et $Y = \mathrm{pr}_2(G)$. Pour l'existence de tels ensembles, on utilise l'axiome de sélection et l'axiome de la réunion introduite au §2.3.2.

Soient x, y, z des ensembles. On note

$$(x, y, z) = ((x, y), z).$$

Ce dernier s'appelle un *triplet*. En plus on a l'équivalence

$$(x, y, z) = (x', y', z') \Longleftrightarrow (x = x',\ y = y' \text{ et } z = z').$$

Remarque 2.1.5. Noter qu'on a pas en général $((x, y), z) = (x, (y, z))$ (prendre par exemple $x = \varnothing$).

Plus généralement, la notion de *n-uplet* ($n \geq 3$) se définit par récurrence :

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$$

.

2.1.7 Produit cartésien de deux ensembles

Soient X et Y des ensembles. L'ensemble

$$\{z \mid (\exists x)(\exists y)\,(z = (x, y) \text{ et } x \in X \text{ et } y \in Y)\}$$

qu'on appelle le *produit cartésien* de X et Y et qu'on désigne par $X \times Y$ (pour l'existence d'un tel ensemble voir TD).

Proposition 2.1.6. *Soient A et B deux ensembles. On a l'équivalence*

$$A \times B = \varnothing \Longleftrightarrow (A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing).$$

Démonstration. Il (faut et il) suffit de montrer l'équivalence

$$A \times B \neq \varnothing \Longleftrightarrow (A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing).$$

Or ceci est évident en utilisant la méthode de l'hypothèse auxiliaire et la définition du produit cartésien. □

Proposition 2.1.7. *Soient X, Y, A et B des ensembles tels que A et B non vides. On a l'équivalence*

$$A \times B \subset X \times Y \Longleftrightarrow (A \subset X \text{ et } B \subset Y).$$

Démonstration. $\Longrightarrow$. Soit $a \in A$. Puisque $b \neq \varnothing$, il existe $b \in B$. Donc $(a, b) \in A \times B$. Alors $(a, b) \in X \times Y$, c-à-d, $(a, b) = (x, y)$ pour certains $x \in X$ et $y \in Y$. Donc $a = x \in X$. D'où $A \subset X$. De même on montre que $B \subset Y$.

L'implication $\Leftarrow$ est évidente de la définition du produit cartésien. □

Exercice 2.1.8. Montrer à l'aide d'un exemple que cette proposition n'est pas vraie en général si l'un des A et B est vide.

Le produit cartésien s'étend au cas de plusieurs facteurs comme suit : Soient $X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n$ $(n \geq 3)$ des ensembles. On définit

$$X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

Noter que les éléments de l'ensemble $X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n$ sont les n-uplets

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \quad \text{où} \quad x_i \in X_i \ (i = 1, \ldots, n).$$

On pose $X^2 = X \times X$, et si $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, on pose

$$X^n = X \times \cdots \times X \times X.$$

2.2 Applications

2.2.1 Correspondances et applications

Soient X et Y deux ensembles. On appelle *correspondance entre* X et Y tout triplet

$$f = (G, X, Y) \quad \text{avec} \quad G \subset X \times Y.$$

On dit que G est *le graphe* de f, X est *l'ensemble de départ* et Y *l'ensemble d'arrivée* de f.

- Si $(x, y) \in G$, on dit que y *correspond à* x *par* f.
- Si $x \in \mathrm{pr}_1(G)$, on dit que f est *définie pour* x, et $\mathrm{pr}_1(G)$ est dit *l'ensemble de définition* (ou *domaine*) *de* f.
- Si $y \in \mathrm{pr}_2(G)$, on dit que y *est une valeur prise par* f, et $\mathrm{pr}_2(G)$ est dit *l'ensemble des valeurs* (ou *image*) *de* f.

Exemples 2.2.1. 1) Soient $X = Y = \mathbb{R}$ et

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

Dans ce cas f n'est rien d'autre que la fonction numérique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ qui n'est pas définie en 0.

2) Soient $X = Y = \mathbb{R}$ et

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

On a

f n'est pas définie pour $x > 1$ ou $x < -1$.

0 correspond à 1 et -1 par f.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\pm\sqrt{1 - x^2}$ correspondent à x par f.

On appelle *application de* X *dans* Y toute correspondance entre X et Y vérifiant :

$$\text{pour tout } x \in X \text{ il existe un et un seul } y \in Y \text{ tel que } (x, y) \in G.$$

Dans ce cas $X = \mathrm{pr}_1(G)$. Pour tout $x \in X$, l'unique élément y de Y tel que $(x, y) \in G$ s'appelle la *valeur de l'application* f en x et on écrit

$$y = f(x).$$

Donc G est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ avec $x \in X$.

Dans la pratique on dit

“soit $f : X \to Y$ une application”

ou

$$\text{“soit } X \xrightarrow{f} Y \text{ une application”.}$$

Parfois on définit une application par la donnée de l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et la valeur de cette application en un élément arbitraire $x \mapsto \ldots$. Par exemple, on considère l'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $f = (G, X, Y)$ et $f' = (G', X', Y')$ deux applications. On a

$$\begin{aligned} f = f' &\iff G = G', \quad X = X', \quad Y = Y' \\ &\iff X = X', \quad Y = Y', \quad \text{pour tout } x \in X,\ f(x) = f'(x). \end{aligned}$$

Exemples 2.2.2. 1) Soit X un ensemble. L'*application identique de X dans lui-même* est définie par

$$\mathrm{id}_X(x) = x \quad \text{pour tout } x \in X.$$

2) Soient X un ensemble et A une partie de X. L'application

$$j_A : A \to X, \quad x \mapsto x$$

s'appelle l'*injection canonique* de A dans X.

Soient X et Y deux ensembles. Les applications de X dans Y forment un ensemble qu'on appelle l'*ensemble des applications de X dans Y*, et qu'on note Y^X ou encore $\mathscr{F}(X, Y)$.

Soit I un ensemble. On appelle *famille indexée par I* tout graphe G tel que $\mathrm{pr}_1(G) = I$ et pour tout $i \in I$ il existe un seul x_i avec $(i, x_i) \in G$. On la note

$$(x_i)_{i \in I}.$$

Si les x_i sont des éléments d'un ensemble X, on dit que $(x_i)_{i\in I}$ est *famille d'éléments de X indexée par I*. Si $X = \mathscr{P}(Y)$ cette famille est dite *famille de parties de Y indexée par I*.

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N}^*$ on utilise plutôt le mot suite.

2.2.2 Images directes et images réciproques

Soit $f : X \to Y$ une application. Soit $A \subset X$. On note

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{il existe } x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}$$

et on l'appelle *image de A par f*.

Soit $B \subset Y$. On note

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

et on l'appelle *image réciproque de B par f*.

On présente maintenant quelques propriétés immédiates :

(i) $f(\varnothing) = \varnothing, \quad \overset{-1}{f}(\varnothing) = \varnothing.$

(ii) Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.

(iii) Si $B \subset B'$ alors $\overset{-1}{f}(B) \subset \overset{-1}{f}(B')$.

(iv) $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$ pour toute $A \subset X$.

(v) Pour toute $A \subset X$ et toute $B \subset Y$, $f(\overset{-1}{f}(B) \cap A) = B \cap f(A)$, en particulier, $f(\overset{-1}{f}(B)) = B \cap f(X)$.

f est dite *constante sur une partie* A *de* X si $f(A)$ est un singleton. f est dite *constante* si f est constante sur X.

Soit $f : X \to X$ une application. Une partie A de X est dite *stable par* f si $f(A) \subset A$, c-à-d,

$$x \in A \Longrightarrow f(x) \in A.$$

Si $A = \{x\}$, on a, A est stable par f si et seulement si $f(x) = x$. Dans ce cas on dit que x est un *point fixe de* f.

2.2.3 Applications composées, restrictions et prolongements

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. L'application $h : X \to Z$ définie par

$$h(x) = g(f(x)) \text{ pour tout } x \in X$$

s'appelle la *composé des applications* f et g et se note $g \circ f$.

On dit que le diagramme triangulaire

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

commute ou est *commutatif*.

Théorème 2.2.3. *Soient*

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z, \quad h : Z \to T$$

des applications. On a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Démonstration. Soit $x \in X$. On a

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$$

et

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Donc $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$. $\square$

On vient de démontrer 'l'associativité" de la composition des applications. On peut enlever désormais les parenthèses quand il s'agit de la composée de trois applications ou plus. Par exemple, pour toute application $f : X \to X$ et tout entier $n \geq 1$ on définit

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (n \text{ facteurs}).$$

Remarque 2.2.4. Soient $X = Y = Z = \mathbb{N}$ et $f(n) = 2n$, $g(n) = 2n+1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g \circ f(n)$ est impair et $f \circ g(n)$ est pair, donc $g \circ f \neq f \circ g$.

Soient $f : X \to Y$ une application et $A \subset X$. L'application $f' = f \circ j_A : A \to Y$ est dite la *restriction de* f *à* A, et se note $f|_A$.

Soient $f : X \to Y$ et $f' : X' \to Y'$ deux applications. On dit que f' *est un prolongement de* f si $X \subset X'$, $Y \subset Y'$, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_X"'] & Y \arrow[d, "j_Y"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

($f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.)

Exemples 2.2.5. 1) Toute application $f : X \to Y$ est un prolongement de chaque restriction de f à une partie de X.

2) Soient X, X', Y des ensembles tels que $X \subset X'$ et $Y \neq \varnothing$. Soit $f : X \to Y$ une application. La façon la plus naturelle pour construire un prolongement de f est la suivante : Pour chaque $c \in Y$, l'application $f'_c : X' \to Y$ définie par

$$f'_c(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ c & \text{si } x \in X' - X. \end{cases}$$

est un prolongement de f.

Théorème 2.2.6. *Soient $f : X \to Y$ et $h : X \to Z$ deux aplications avec $Z \neq \varnothing$. On a l'équivalence de*

1) il existe une application $g : Y \to Z$ vérifiant

$$h = g \circ f,$$

c-à-d le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

2) pour tous $x, x' \in X$,

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow h(x) = h(x').$$

Démonstration. $\Longrightarrow$. Soient $x, x' \in X$. Si $f(x) = f(x')$ alors

$$h(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = h(x').$$

$\Leftarrow$. Il suffit de définir g sur $f(X)$ et de faire prolonger g sur Y tout entier. Soit $y = f(x)$ pour un certain $x \in X$. On définit

$$g(y) = h(x).$$

On doit vérifier que $g(y)$ est indépendante du choix de x. Si $y = f(x) = f(x')$ où $x, x' \in X$, alors $h(x) = h(x')$. Soit $g : Y \to Z$ un prolongement de g. On a

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = h(x)$$

pour tout $x \in X$. D'où $g \circ f = h$. □

2.2.4 Applications injectives

Une application $f : X \to Y$ est dite *injective* (ou une *injection*) si pour tous $x, x' \in X$,

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

ou de manière équivalente

$$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$$

Exemples 2.2.7. 1) Soit X un ensemble. L'application identique de X dans X est injective.

2) Soient X un ensemble et A une partie de X. L'injection canonique de A dans X est injective.

3) On prend $X = Y = \mathbb{R}$. L'application $f(x) = x^3$ est injective, tandis que l'application $g(x) = x^2$ ne l'est pas car $g(1) = g(-1)$.

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ des applications telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. On dit dans ce cas que g est une *application inverse à gauche de f* et f est une *application inverse à droite de g*.

Théorème 2.2.8. *Soit $f : X \to Y$ une application avec X et Y non vides. Les conditions suivantes sont équivalentes*

a) f est injective.

b) f admet une application inverse à gauche g.

Démonstration. On a, g est une application inverse à gauche de f si et seulement si le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_X"'] & & Y \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Le théorème 2.2.6 achève donc la preuve. □

2.2.5 Applications surjectives et bijectives

Une application $f : X \to Y$ est dite *surjective* ou une *surjection* si

$$f(X) = Y,$$

c-à-d, pour tout $y \in Y$ il existe au moins un $x \in X$ tel que $y = f(x)$.

Une application $f : X \to Y$ est dite *bijective* ou une *bijection* si elle est en même temps injective et surjective. L'application identique de X dans X est bien évidemment bijective, ainsi que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$.

On appelle permutation d'un ensemble X toute bijection de X dans X. On désigne par $\mathrm{S}(X)$ l'ensemble des permutations de X. Si $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, on utilise la notation S_n plutôt que $\mathrm{S}(X)$.

Théorème 2.2.9. *Soit $f : X \to Y$ une application avec X et Y non vides. Les conditions suivantes sont équivalentes*

a) f est surjective.

b) f admet une application inverse à droite h.

Démonstration. $b) \Longrightarrow a)$. Si $y \in Y$ alors

$$y = \mathrm{Id}_Y(y) = f \circ h(y) = f(h(y)).$$

Donc f est surjective.

$a) \Longrightarrow b)$. Soit $y \in Y$. L'ensemble

$$F_y = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

est non vide. On choisit "au hasard" un élément de F_y qu'on note $h(y)$. On vient alors de définir une application $h : Y \to X$ telle que

$$f(h(y)) = y, \quad \text{pour tout } y \in Y.$$

□

Remarque 2.2.10. La démonstration de l'implication $a) \Longrightarrow b)$ semble mathématiquement correcte mais ce n'est pas le cas. Pour la compléter on a besoin de

Axiome du choix. Pour tout ensemble non vide X, il existe une application

$$c : \mathscr{P}(X) - \{\varnothing\} \to X$$

telle que $c(A) \in A$ pour toute partie non vide de X.

Si $X = \mathbb{N}$ on peut prendre pour $c(A)$ le plus petit élément de A.

Corollaire 2.2.11. Soit $f : X \to Y$ une application avec X et Y non vides. Les conditions suivantes sont équivalentes

a) f est bijective.

b) f admet une application inverse à gauche g et une application inverse à droite h.

Si ces conditions sont vérifiées, g et h sont uniques et égales.

Démonstration. Il suffit de montrer la seconde partie. On a

$$g = g \circ \mathrm{Id}_Y = g \circ f \circ h = \mathrm{Id}_X \circ h = h.$$

□

L'unique application $g : Y \to X$ vérifiant

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{Id}_Y$$

s'appelle l'*application réciproque* de f et se note f^{-1}.

On a évidemment

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

pour tous $x \in X$, $y \in Y$.

Théorème 2.2.12. *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.*

1) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

2) Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

3) Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

4) Si f est bijective alors f^{-1} est bijective et

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Démonstration. Exercice. □

2.3 Réunions et intersections

2.3.1 Réunion et intersection de deux ensembles

Soient X et Y deux ensembles. On appelle *intersection de X et Y*, et on désigne par

$$X \cap Y,$$

l'ensemble

$$z \in X \cap Y \Longleftrightarrow (z \in X \quad \text{et} \quad z \in Y),$$

c-à-d, les éléments de $X \cap Y$ sont les ensembles qui appartiennent à la fois à X et à Y.

On appelle *réunion de X et Y*, et on désigne par

$$X \cup Y,$$

l'ensemble

$$z \in X \cup Y \Longleftrightarrow (z \in X \quad \text{ou} \quad z \in Y),$$

c-à-d, les éléments de $X \cup Y$ sont les ensembles qui appartiennent soit à X, soit à Y (et éventuellement à tous les deux).

On a évidemment :

$$X \cap Y \subset X, \quad X \cap Y \subset Y, \quad X \subset X \cup Y, \quad X \subset X \cup Y,$$

$$(Z \subset X \quad \text{et} \quad Z \subset Y) \Longleftrightarrow Z \subset X \cap Y,$$

($X \cap Y$ est le plus grand ensemble contenu à la fois dans X et dans Y.)

$$(X \subset Z \quad \text{et} \quad Y \subset Z) \Longleftrightarrow X \cup Y \subset Z.$$

($X \cup Y$ est le plus petit ensemble contenant à la fois X et Y.)

On dit que X et Y sont *disjoints* si

$$X \cap Y = \varnothing.$$

On présente ici les propriétés élémentaires de la réunion et de l'intersection :

$$\begin{gathered} X \cap Y = Y \cap X, \quad X \cup Y = Y \cup X, \\ (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z), \quad (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \\ X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z), \quad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \\ (X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B) \quad \text{si} \quad A, B \subset X. \end{gathered}$$

2.3.2 Réunion et intersection d'une famille d'ensembles

L'existence de la réunion est un axiome de la théorie des ensembles, dit **axiome de la réunion**.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On appelle *réunion de cette famille*, et on désigne par

$$\bigcup_{i\in I} A_i,$$

l'ensemble défini par

$$(x \in A) \Longleftrightarrow (\exists i)\,(i \in I \text{ et } x \in A_i),$$

c-à-d, l'ensemble des x qui appartiennent à l'un au moins des A_i.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties d'un ensemble X, sa réunion est une partie de X. Noter que cette réunion ne dépend, ni de X, ni de l'ensemble d'arrivée de l'application $i \mapsto A_i$.

Noter aussi que, si $I = \varnothing$ alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \varnothing$.

Théorème 2.3.1. *Soient A la réunion d'une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$ et X un ensemble. On a, $A_i \subset X$ pour tout i, si et seulement si, $A \subset X$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$. Soit $x \in A$. Donc il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$. D'où $x \in X$.
$\Leftarrow$. Il suffit d'utiliser le fait que, pour tout $i \in I$, $A_i \subset A$. □

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'ensembles (c-à-d, I est non vide). On appelle *intersection de cette famille*, et on désigne par

$$\bigcap_{i\in I} A_i,$$

l'ensemble défini par

$$(x \in A') \Longleftrightarrow (\forall i)\,((i \in I) \Longrightarrow (x \in A_i)),$$

c-à-d, l'ensemble des x qui appartiennent à tous les X_i.

Théorème 2.3.2. *Soient A l'intersection d'une famille non vide d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$ et X un ensemble. On a, $X \subset A_i$ pour tout i, si et seulement si, $X \subset A$.*

Démonstration. Exercice. □

Finalement, noter que

$$X \cup Y = \bigcup_{Z\in\{X,Y\}} Z, \quad X \cap Y = \bigcap_{Z\in\{X,Y\}} Z.$$